Intervalle d'espace-temps en théorie de la relativité

Christian Magnan

Le carré de l'intervalle d'espace-temps entre deux événements dans l'espace-temps de la relativité restreinte ou générale est l'équivalent du carré de la distance géométrique entre deux points dans l'espace euclidien. Cette quantité est invariante par changement de repère. Elle permet de savoir si deux événements peuvent être connectés par un lien de cause à effet ou sont au contraire causalement indépendants l'un de l'autre. Lorsque les deux événements sont séparés par ces quantités infinitésimales, cet intervalle prend le nom de métrique de l'espace-temps.

Expression de l'intervalle

En géométrie plane le carré de la distance Δs entre deux points A et B de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B) par rapport à un repère cartésien s'exprime comme la somme de deux carrés sous la forme:

$$(\Delta s)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 .$$

On écrit couramment de façon plus condensée

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 .$$

De façon analogue mais toutefois différente (en ce sens qu'un signe «moins» va apparaître) on écrit le «carré» de l'intervalle d'espace-temps entre deux événements A et B de coordonnées (t_A, x_A) et (t_B, x_B) dans un espace-temps à deux dimensions (une de temps, soit t, et une d'espace, soit x) comme la différence entre deux carrés sous la forme:

$$c^2 \Delta\tau^2 = c^2 (t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2$$

ou

$$c^2 \Delta\tau^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 .$$

Dans ces expressions la présence du facteur c s'explique par le fait que longueurs et temps sont fusionnés dans l'espace-temps de la relativité en une même entité et que dans ce but un temps t est exprimé par la distance ct que la lumière parcourt pendant ce laps de temps. En conservant la dimension temporelle unique t mais en généralisant à trois dimensions d'espace (x, y, z) et en introduisant la distance géométrique ordinaire

$$\Delta s^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 \equiv \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 ,$$

on écrit le «carré»de l'intervalle d'espace-temps entre les événements A et B comme:

$$c^2 \Delta\tau^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta s^2 .$$

Alors que le carré de la distance géométrique euclidienne ne contenait que des signes «plus»et se révélait donc toujours positif, l'expression du «carré» de l'intervalle spatio-temporel contient un signe «moins» et peut de ce fait fournir un nombre positif, négatif ou nul, selon la taille respective de la séparation spatiale Δs et de la séparation temporelle Δt des deux événements. Du fait de ce changement de signe possible et afin de manipuler des carrés positifs il est commode d'introduire les notations :

$$c^2\Delta\tau^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta s^2 \ ,$$

dans le cas où ce carré est positif, et

$$\Delta\sigma^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta s^2 \ ,$$

dans le cas contraire.

Invariance

Historiquement la relativité restreinte s'est développée principalement autour des deux axiomes que constituent le principe de relativité et l'invariance de la vitesse de la lumière par changement de référentiel et s'est attachée aux fameuses formules de Lorentz permettant de passer des coordonnées exprimées dans un repère à celles exprimées dans un autre repère. Dans la présentation moderne de la théorie c'est l'approche purement géométrie qui est plutôt adoptée. Ce choix est justifié dans la mesure où ce point de vue géométrique a triomphé de façon spectaculaire en relativité générale puisque dans cette dernière théorie la gravitation est analysée comme une propriété géométrique de l'espace-temps. En effet dans la théorie de la gravitation d'Einstein, les masses font que deux particules libres partant d'un même point s'écartent l'une de l'autre de façon non-linéaire. Dans la vision géométrique de la relativité restreinte la théorie se fonde sur l'invariance du carré de l'intervalle d'espace-temps. En géométrie euclidienne on repère un point dans l'espace par ses trois coordonnées (x, y, z) . Si l'on considère deux points, que l'on mesure leurs trois coordonnées dans deux repères de coordonnées cartésiennes différents, que l'on fasse pour chacun des repères les trois différences de ces coordonnées et que l'on élève ces dernières au carré, l'axiome euclidien énonce que la somme des carrés ne dépend pas du choix du repère. Autrement dit, avec des notations évidentes, la quantité

$$\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 \ = \ \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \equiv \Delta s^2$$

est invariante par changement de système de coordonnées. On lui donne le nom de «carré de la distance entre les deux points». En relativité restreinte on repère un événement dans un espace-temps à quatre dimensions par ses quatre coordonnées: une coordonnée temporelle t et trois coordonnées spatiales (x, y, z) . Si on considère deux événements séparés par une distance temporelle Δt et une distance spatiale Δs, la relativité restreinte stipule que la quantité

$$c^2\Delta t^2 - \Delta s^2$$

c'est-à-dire l'intervalle d'espace-temps défini ci-dessus, ne dépend pas du repère choisi pour la mesurer. Autrement dit:

$$c^2\Delta t'^2 - \Delta s'^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta s^2 \equiv c^2\Delta\tau^2 \equiv -\Delta\sigma^2 \ .$$

On lui donne le nom de «carré de l'intervalle d'espace-temps entre les deux événements». Cet axiome d'invariance permet par exemple de démontrer rapidement la formule donnant ce que l'on appelle la dilatation du temps (qui est à la base du paradoxe des jumeaux). Considérons en effet une fusée animée d'une vitesse v par rapport à la Terre et les deux événements représentés par l'émission de deux éclairs successifs dans la fusée. Notons ΔT l'intervalle de temps entre les deux éclairs dans le référentiel de la fusée et Δt l'intervalle mesuré dans le référentiel terrestre (des horloges terrestres synchronisées auront été disposées le long du trajet de la fusée). La distance spatiale entre les deux points d'émission des deux éclairs est nulle dans le référentiel de la fusée et égale à la distance $v\,\Delta t$ parcourue par la fusée pour des observateurs terrestres. L'axiome d'invariance de l'intervalle spatio-temporel s'écrit alors

$$c^2\Delta t^2 - v^2\Delta t^2 = c^2\Delta T^2 - 0 \equiv c^2\Delta\tau .$$

On en déduit la formule classique de ralentissement des horloges

$$\Delta t = \gamma\Delta T = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} .$$

On voit aussi que la quantité τ est égale au temps T mesuré dans le repère propre de la fusée. On l'appelle le temps propre de la fusée.

Relation entre événements

L'intervalle spatio-temporel entre deux événements peut être de trois types différents:

- temps,
- espace,
- lumière.

Genre temps

Si l'intervalle temporel $c\Delta t$ l'emporte sur la distance spatiale Δs l'intervalle est du **genre temps** et le carré du temps propre est positif:

$$c^2\Delta\tau^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta s^2 > 0 .$$

Exemple: considérons une particule se déplaçant le long d'une trajectoire quelconque. Alors la séquence des événement successifs marquant le cheminement de la particule (à chaque point de la trajectoire on associe le temps correspondant) représentera une série d'intervalles de type temps. En effet, aucune particule ne pouvant se déplacer plus vite que la vitesse de la lumière, la quantité Δs sera toujours plus petite que le $c\Delta t$ correspondant. Autrement dit un signal lumineux, qui voyage plus vite que la particule, pourra toujours joindre un événement à un autre. Tous les événements de la trajectoire, qui constituent ce que l'on appelle la ligne d'univers de la particule considérée sont donc liés causalement. La formule d'invariance montre en outre que la quantité τ est le temps mesuré dans le repère de la particule (car dans ce repère l'intervalle spatial entre deux événements est toujours nul): on l'appelle le temps propre de la particule.

Genre espace

Si l'intervalle spatial Δs l'emporte sur l'intervalle temporel $c\Delta t$, l'intervalle est du **genre espace**. Il peut être commode dans ce cas, pour manipuler des carrés positifs, de considérer le carré de l'intervalle d'espace propre $\Delta\sigma$ défini ci-dessus comme:

$$\Delta\sigma^2 \equiv -c^2\Delta\tau^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta s^2 > 0 .$$

Exemple (que les justes défenseurs de l'abolition de la peine de mort veuillent bien pardonner cet exemple malheureux mais sans équivoque!): une personne est condamnée à mort et doit être exécutée sur la planète Pluton. Elle peut éventuellement bénéficier de la grâce du président, qui lui est situé sur Terre, à 4 heures de lumière de la planète lointaine. L'heure de l'exécution est fixée à midi. L'événement «grâce présidentielle»A peut-il agir sur l'événement «exécution»B? La réponse est facile: si le président envoie sa grâce après 8 heures du matin, l'avis de grâce n'aura pas le temps de parvenir jusqu'à Pluton et le condamné sera exécuté. Dans ce cas la distance spatiale entre les événements A et B, grâce et exécution, est trop grande devant l'intervalle de temps les séparant. Le terme Δs est plus grand que le terme $c\Delta t$ et le carré de la distance propre entre A et B est positif. Quand l'intervalle d'espace-temps entre les deux événements est du type espace, ces événements sont causalement indépendants. Aucun ne peut agir sur l'autre.

Genre lumière

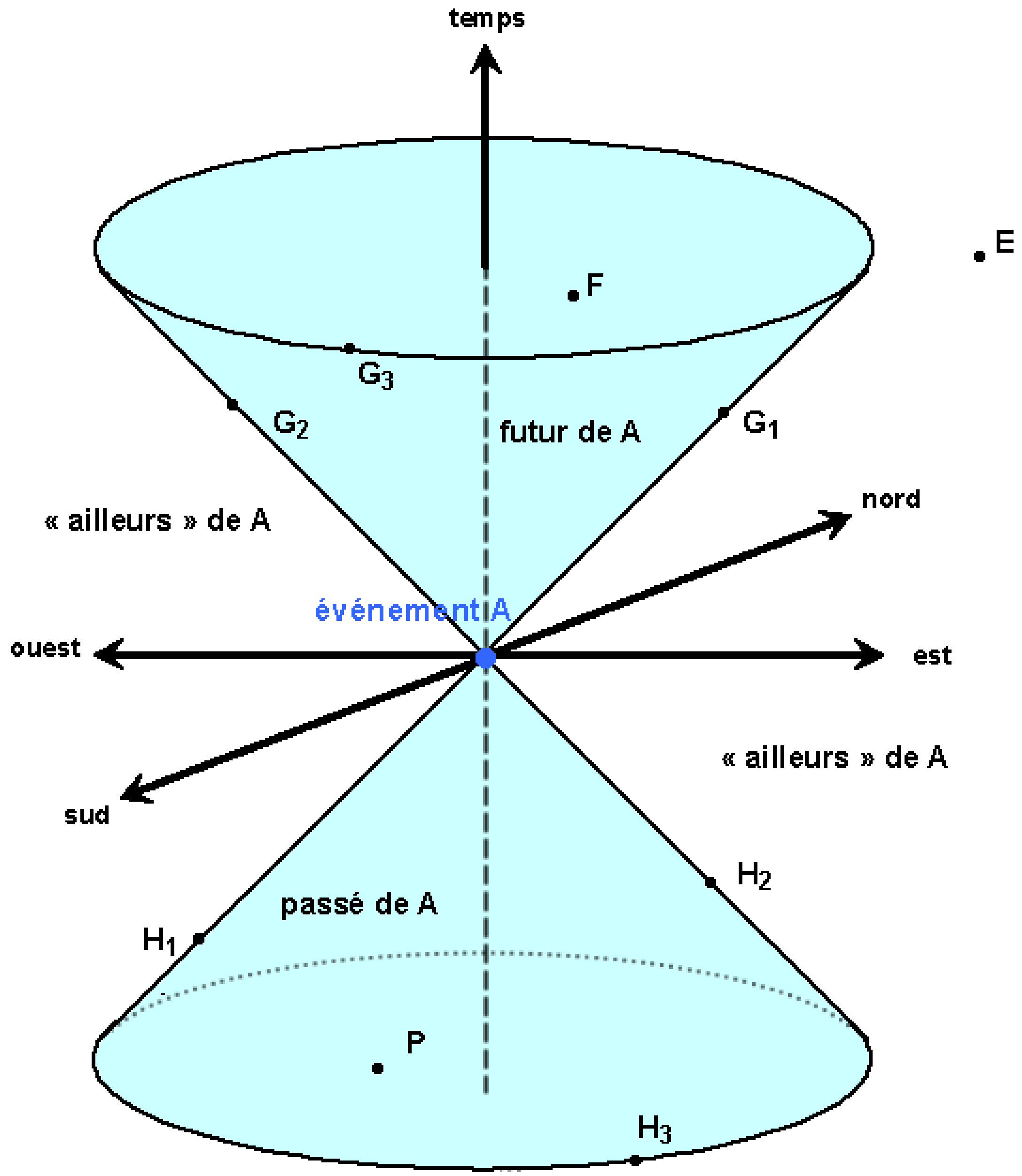
Si l'intervalle spatio-temporel est nul, on dit que l'intervalle est du **genre lumière**. En effet ce cas correspond à la situation où la lumière parcourt exactement la distance géométrique entre les deux événements pendant le laps de temps séparant ces deux événements. Exemple: si l'événement A consiste en l'envoi d'un signal laser depuis la Terre vers la Lune et l'événement B consiste en la réception de ce signal sur la Lune, l'intervalle spatio-temporel entre A et B sera nul puisque la distance Δs entre Terre et Lune sera justement égale à la distance $c\Delta t$ parcourue par la lumière pendant le temps Δt.

Division de l'espace-temps

Le fait que l'intervalle spatio-temporel entre deux événements A et B ne dépende pas du système de coordonnées choisi pour le calculer confère à cette notion un caractère *absolu*. Cette propriété d'invariance, considérée ici sous l'angle de l'invariance de signe, autorise le physicien à effectuer un classement des événements dans l'espace-temps qui, étant indépendant de tout repère, permet de distinguer parmi eux ceux qui sont connectés par un lien de cause à effet et ceux qui au contraire sont causalement indépendants.

Cône de lumière

En relativité restreinte il est commode d'utiliser un diagramme d'espace-temps pour donner une description des événements. La difficulté de représentation tient en ce que quatre coordonnées, une de temps et trois d'espace, sont nécessaires pour caractériser un événement et qu'il est impossible de figurer un point à quatre coordonnées dans notre espace à trois dimensions. Pour remédier à cette difficulté il est d'usage de simplifier la partie spatiale en y supprimant une ou deux dimensions, ce qui revient à considérer des événements se produisant dans un plan ou le long d'une droite. Dans le diagramme ci-joint on a supprimé une dimension d'espace (disons le «haut») pour représenter des événements se produisant dans un plan, dont les axes sont par exemple le nord et l'est. L'axe vertical, dirigé vers le haut, représente l'axe du temps. Attention: un déplacement dans cette direction ne représente pas un déplacement spatial, comme si les points avançaient vers le haut. Un point fixe dans le plan considéré (nord, est) est représenté dans ce diagramme d'espace-temps par une droite parallèle à l'axe temporel traduisant le fait que le temps t avance, mais sans que changent les coordonnées (nord, est). La classification des paires d'événements à l'aide de l'intervalle d'espace-temps indiquée ci-dessus montre que l'intervalle de genre lumière joue un rôle frontière entre le genre temps et le genre espace. En effet le carré de temps propre $c^2\Delta\tau^2$ passe d'une valeur positive à une valeur négative en traversant la valeur nulle pour un ligne d'univers d'une particule lumineuse. Dans le diagramme d'espace-temps ci-contre est représenté l'ensemble des événements correspondant à l'émission d'un signal lumineux depuis l'événement A, c'est-à-dire à un instant donné (pris ici pour origine) et en un lieu donné (également pris pour origine), dans une certaine direction. Ainsi sont indiqués les points tels que $G_1, G_2, G_3 \ldots$ qui se situent tous sur un cône de sommet A



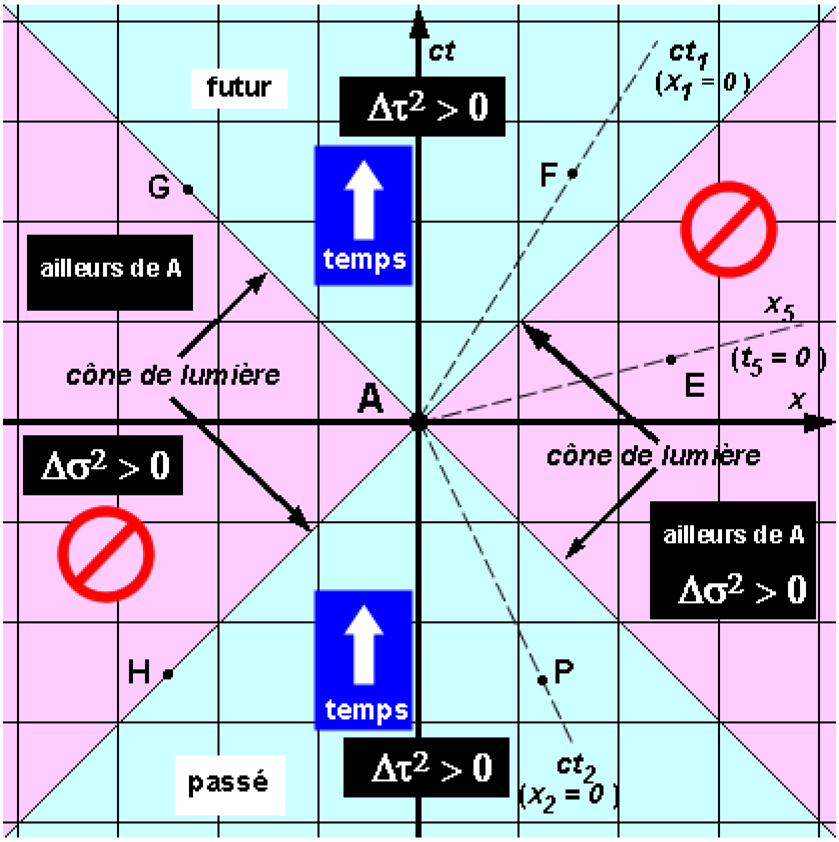
Le cône de lumière de l'événement A définit une partition de l 'espace-temps

puisque la ligne d'univers décrite par chaque signal lumineux correspond à une droite d'inclinaison donnée, fixée par le rapport entre la distance parcourue et le temps mis à la parcourir, rapport égal à la vitesse de la lumière. Attention à nouveau: le photon ne se dirige pas vers le haut. Il reste contenu, spatialement parlant, dans le plan d'origine (nord, sud, est, ouest). Il avance horizontalement. Le cône correspondant aux photons issus de A est le cône de lumière du futur. De façon symétrique sont également indiqués sur le diagramme les événements tels que $H_1, H_2, H_3 \ldots$ correspondant cette fois à l'émission de signaux lumineux depuis un point du plan origine et capables d'atteindre l'événement A, c'est-à-dire capable d'arriver au temps $t = 0$ au point origine A. Ces signaux viennent du passé et constituent sur le schéma le cône de lumière du passé de l'événement A. Bien entendu, chaque événement possède son propre cône de lumière. Le cône de lumière de A trace la frontière entre les événements séparés de A par un intervalle de genre temps, ceux dont les points représentatifs tels que F et P sont situés à l'intérieur du cône de lumière, et les événements séparés de A par un intervalle de genre espace, dont les points représentatifs tels que E sont situés à l'extérieur du cône de lumière.

Les différents couples d'événements

Précisons les liens de causalité pouvant exister ou non entre A et un événement de l'espace-temps selon la position de ce dernier par rapport au cône de lumière. Pour faciliter la présentation nous supprimons encore une dimension spatiale pour n'en garder qu'une, le long d'un axe, ce qui signifie que nous considérons des événements se produisant sur une même droite de l'espace, chaque lieu de cet axe étant repéré par sa position x. Dans un diagramme d'espace-temps à deux dimensions, selon le schéma ci-contre, le cône de lumière de l'événement A (choisi pour origine des coordonnées spatiale et temporelle) est représenté par la région du plan comprise entre les deux droites de 45^ d'inclinaison, d'équation $ct = \pm x$ constituant les lignes d'univers des photons issus de A et se dirigeant dans les deux directions opposées $x > 0$ et $x < 0$. Le fait que l'intervalle d'espace-temps soit indépendant du repère choisi pour le calculer nous certifie que l'on peut répartir les couples d'événements de façon absolue, en cinq catégories, selon la liste suivante:

1. Une particule matérielle issue de A peut agir sur l'événement futur F : dans ce cas F est situé dans le cône du futur de A et forme avec lui un couple d'événements du genre temps. Il existe un repère dans lequel ces événements A et F sont coponctuels : celui de la particule capable d'aller de l'événement A à l'événement B. Sur le diagramme ci-contre la droite AF représente l'axe temporel de ce repère particulier (axe correspondant à un point immobile $x_1 = \text{constante}$ du repère).
2. Une particule matérielle issue d'un événement antérieur P est capable d'exercer une action sur l'événement postérieur A: dans ce cas P est situé à l'intérieur du cône du passé de A et forme avec lui un couple d'événements du genre temps. Il existe un repère dans lequel A et P sont coponctuels: celui de la particule capable de joindre P à A. L'axe temporel de ce repère est la droite PA d'équation $x_2 = \text{constante}$ du diagramme ci-contre.
3. Un éclair lumineux émis de A peut atteindre l'événement G: dans ce cas G est situé sur la partie future du cône de lumière de A et forme avec lui un couple du genre lumière. Il en est de même dans tout repère, la vitesse de la lumière ne dépendant pas du système de coordonnées choisi.
4. Un éclair lumineux émis de H peut atteindre l'événement A: dans ce cas H est situé sur la partie passée du cône de lumière de A et forme avec lui un couple du genre lumière. Il en est de même dans tout repère.
5. Aucun événement coïncidant avec A ne peut agir sur l'événement E: dans ce cas E est extérieur au cône de lumière de A et constitue avec lui un couple du genre espace. Aucun lien de cause à effet ne peut exister entre A et E. L'événement E est situé dans l'«ailleurs»de A, cela étant vrai de tout repère. Il existe un système de coordonnées particulier dans lequel les deux événements sont simultanés: celui dont l'axe spatial est représenté par la droite AE d'équation $t_5 = \text{constante}$.



Le cône de lumière permet de distinguer le passé et le futur de l'événement A de façon absolue

Est-il possible de remonter dans le passé? Non, dans le cadre de la relativité restreinte, car si le carré $\Delta\tau^2$ de l'intervalle d'espace-temps $\Delta\tau$ est invariant alors la valeur elle-même de cet intervalle, en tenant compte de son signe, est également invariante. Considérons en effet un couple d'événements du genre temps tel que l'intervalle $\Delta\tau$ de A vers F soit positif (t_F est plus grand que t_A, ou F est postérieur à A). Pour que cet intervalle change de signe (F devenant antérieur à A) il faudrait qu'il traverse la valeur nulle (car nous considérons des changements de repère continus). Or cela est impossible puisque, étant positive et invariante par changement de système de coordonnées, la valeur du carré restera positive. Par conséquent si F est dans le futur de A aucun signal ne pourra revenir de F vers A. La leçon est la suivante. Bien que l'espace et le temps soient deux grandeurs physiques pouvant être mesurées par une même unité, elles ne sont pas de même nature. Tandis qu'on peut naviguer dans l'espace en allant dans toute direction et en pouvant notamment faire demi-tour, on ne peut pas naviguer dans le temps, lequel s'écoule inexorablement dans le même sens. La relativité restreinte ne fournit pas de machine à remonter le temps.

Métrique

Lorsque les deux événements A et B entre lesquels on calcule l'intervalle d'espace-temps sont très voisins, leurs coordonnées ne différant que par des quantités infinitésimales, l'expression de cette séparation spatio-temporelle prend le nom de **métrique**. Ainsi la métrique de l'espace-temps de la relativité restreinte, ou métrique de Minkowski s'écrit:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

comme un carré de temps et

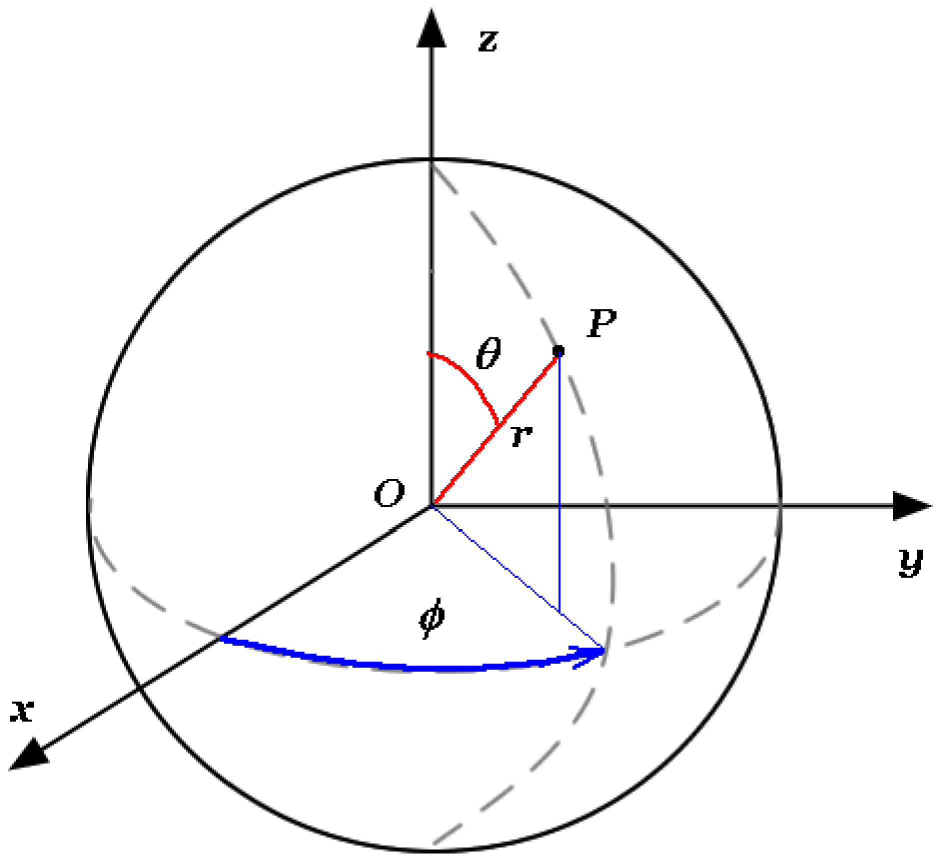
$$c^2 d\sigma^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

comme un carré d'espace, lorsqu'on a choisi de repérer la position d'un point dans un système de coordonnées cartésiennes. En coordonnées sphériques on écrira

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

où θ est la colatitude et ϕ l'azimut. En relativité général la métrique est *localement* une métrique de Minkowski mais si on veut l'étendre à une région plus vaste de l'espace-temps il faut utiliser une expression plus générale. La présence d'une courbure de l'espace se traduit par le fait que dans la métrique s'introduisent des coefficients dépendant du point considéré. Par exemple au voisinage d'un corps gravitant de masse M la métrique est la fameuse métrique de Schwarzschild:

$$d\sigma^2 = -c^2(1 - 2GMc^{-2}/r)dt^2 + (1 - 2GMc^{-2}/r)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$



où l'on a utilisé des coordonnées sphériques. En écriture tensorielle, le vecteur élémentaire joignant l'événement A à un événement B voisin a pour coordonnées

$$(dx^\mu) = (c\,dt, dx, dy, dz)$$

où μ est un indice à quatre valeurs 0, 1, 2, 3. En introduisant le tenseur de métrique $\mathbf{g}$ on écrit le carré de l'intervalle d'espace-temps élémentaire entre deux événements voisins A et B sous la forme

$$c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu}\ dx^\mu\ dx^\nu$$

où les quantités $g_{\mu\nu}$ dépendent des événements considérés. On a adopté dans cette écriture la convention d'Einstein stipulant que lorsqu'un indice se répète dans le produit il faut effectuer une sommation sur celui-ci. Autrement dit

$$g_{\mu\nu}\ dx^{\mu}\ dx^{\nu} \equiv \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\ dx^{\mu}\ dx^{\nu}\,.$$

Ainsi les composantes du tenseur de métrique en géométrie de Schwarzschild sont

$$g_{tt} = -(1 - 2GMc^{-2}/r)\,, \quad g_{rr} = (1 - 2GMc^{-2}/r)^{-1}\,, \quad g_{\theta\theta} = r^2\,, \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta$$

toutes les autres composantes étant nulles.